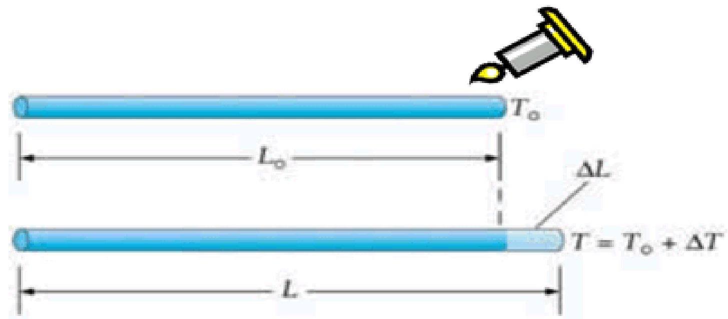
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Expansão (dilatação) térmica linear



$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

- No SI:

$[\Delta L]$ =m; $[L_0]$ = m;
$[\Delta T]$=^0C; $[\alpha]$=$^0C^{-1}$

<u>OBS:</u>

- Validade: $\Delta L \ll Lo$
- α: coeficiente médio de expansão linear

Material	α ($10^{-6}\ {}^0C^{-1}$)
Chumbo	29
Alumínio	24
Latão e bronze	19
Cobre	17
Concreto	12
Aço	11
Vidro (comum)	9
Vidro (Pyrex)	3,2
Invar (liga Ni-Fe)	0,9

Fonte: Serway, Jewett. Princípios de Física, Vol 2, p.562

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3
Expansão térmica de sólidos e líquidos

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

Exemplo

Um estudante mede o comprimento de uma haste de bronze com uma trena de aço a 20,0 ^0C. A leitura é 95,00 cm. O que a trena iria indicar para o comprimento da haste quando a haste e a trena estivessem a uma temperatura de (a) -15^0C, (b) 55 ^0C? Dados: α_{bronze} = 19.10^{-6} $^oC^{-1}$; $\alpha_{aço}$ = 11.10^{-6} $^oC^{-1}$.

Resolução:

$a)$

$$\Delta L_{bronze} = \alpha_{bronze} L_0 \Delta T = 19.10^{-6}.95.(-15-20) = -63175.10^{-6} = -0,063\, cm$$

$$\Delta L_{aço} = \alpha_{aço} L_0 \Delta T = 11.10^{-6}.95.(-15-20) = -36575.10^{-6} = -0,036\, cm$$

$$\Delta L_{bronze} - \Delta L_{aço} = -0,063-(-0,036) = 0,03\, cm \Rightarrow$$

$$Leitura = 95,00 - 0,03 = 94,97\, cm$$

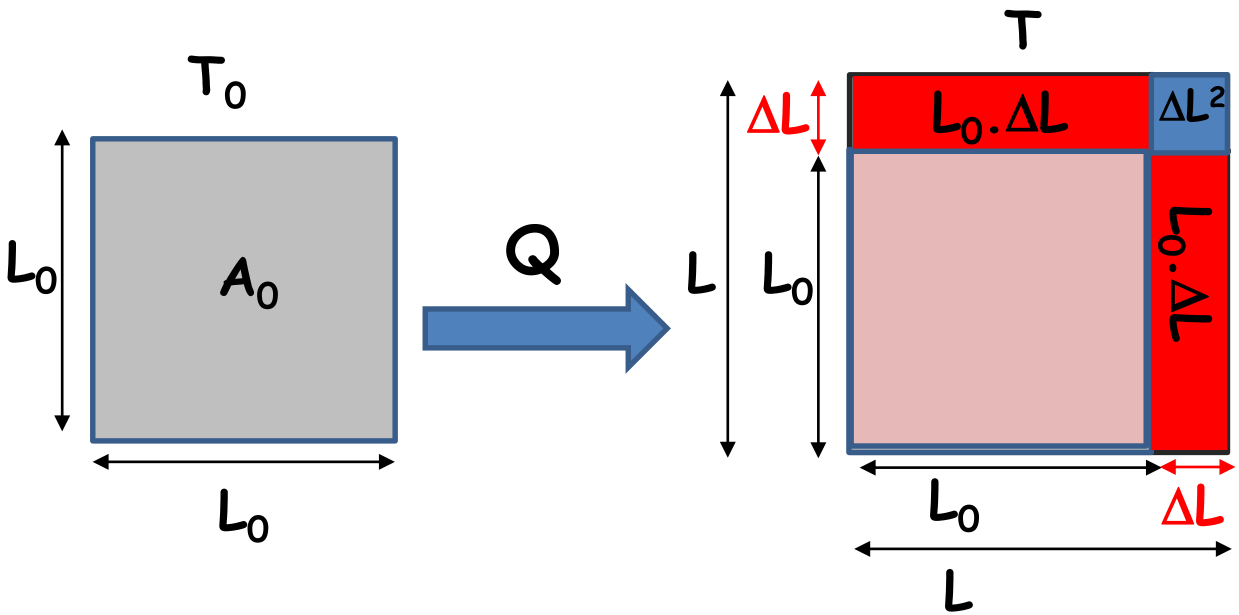
$b)$

$$\Delta T = (55-20) = 35\ ^0C \Rightarrow$$

$$Leitura = 95,00 + 0,03 = 95,03\, cm$$

TMDZ3
Expansão térmica de sólidos e líquidos

Expansão térmica superficial



$$A = L.L = (L_0 + \Delta L).(L_0 + \Delta L) = \quad L_0{}^2 + \quad 2L_0.\Delta L + \quad \Delta L^2$$

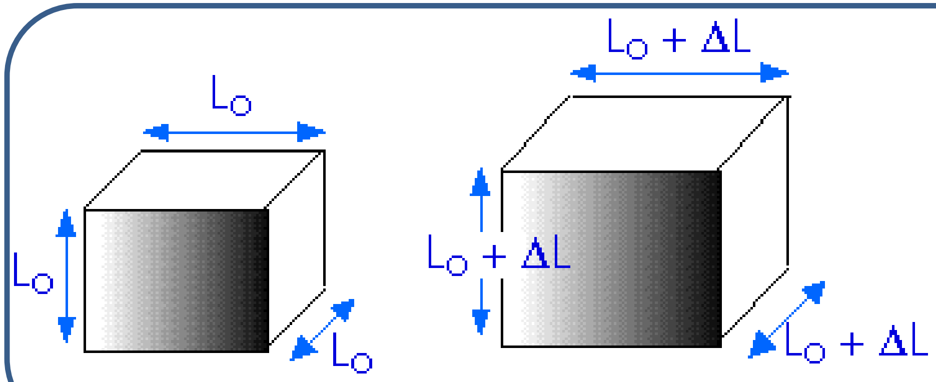
$$\Delta L^2 \ll L_0{}^2 + 2.L_0.\Delta L$$

$$\boxed{A \cong L_0{}^2 + 2L_0(\alpha L_0 \Delta T) = L_0{}^2 + 2L_0{}^2 \alpha \Delta T = A_0 + 2A_0 \alpha \Delta T \Rightarrow A - A_0 = 2A_0 \alpha \Delta T}$$

$$\boxed{\Delta A = \beta A_0.\Delta T; \; \beta = 2\alpha}$$

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

Expansão térmica volumétrica

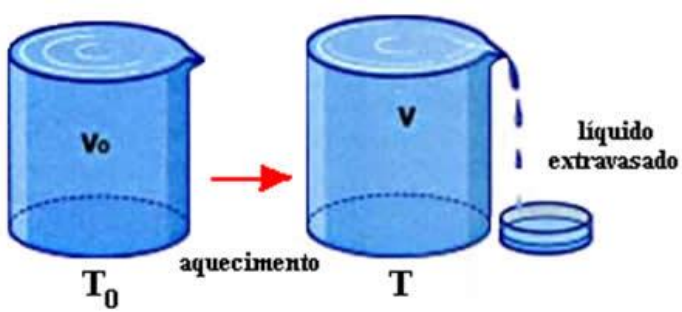


De forma análoga, pode-se demonstrar que:

$$\Delta V = \gamma V_0 \Delta T; \gamma = 3\alpha$$

OBS: No caso de líquidos, há que também considerar a dilatação volumétrica do recipiente:

$$\Delta V_{líquido} = \Delta V_{recipiente} + \Delta V_{aparente}$$



Material	Acetona	Mercúrio	Glicerina	Gasolina	Ar (0 ºC)
γ (10^{-4} $^0C^{-1}$)	1,5	1,82	4,85	9,6	36,7
Fonte: Serway, Jewett. Princípios de Física, Vol 2, p.562					

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Exemplo

Um líquido com um coeficiente de expansão volumétrica γ enche uma casca esférica (bulbo) de volume V_0 à temperatura T_0. A casca é feita de material que tem coeficiente médio de expansão linear α. O líquido está livre para se expandir em um capilar aberto de área A que se projeta do alto da esfera.

(a) Mostre que se a temperatura aumentar ΔT o líquido se eleva no capilar a quantidade Δh dada pela equação: $\Delta h = (V_0 / A)(\gamma - 3\alpha)\Delta T$

(b) Para um sistema típico, tal como um termômetro de mercúrio, porque é uma boa aproximação desprezar a expansão da casca?

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3
Expansão térmica de sólidos e líquidos

Exemplo - Resolução

Resolução:

a)

$$\Delta V_{líquido} = V_0 \gamma \Delta T$$

$$\Delta V_{casca} = V_0 3\alpha \Delta T$$

$$\Delta V_{aparente} = \Delta V_{líquido} - \Delta V_{casca} \Rightarrow$$

$$A.\Delta h = V_0 \gamma \Delta T - V_0 3\alpha \Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta h = (V_0 / A)(\gamma - 3\alpha)\Delta T$$

$b)$

γ é da ordem de $10^{-4}\ {}^0C^{-1}$

α é da ordem de $10^{-6}\ {}^0C^{-1}$

$Logo,\ \alpha \ll \gamma \Rightarrow \Delta V_{aparente} \cong \Delta V_{líquido}$

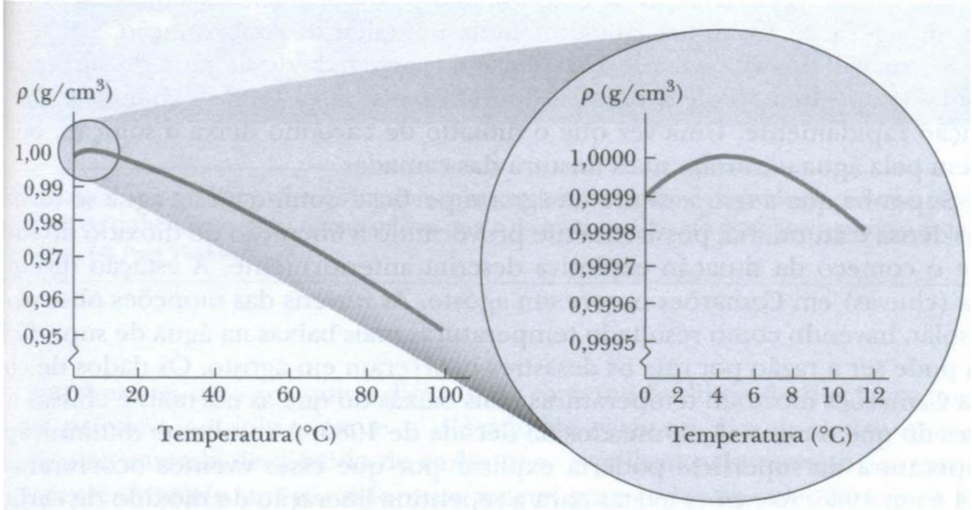
Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Comportamento anômalo da água



Entre 0 e 4^0C a água se contrai conforme se aquece

- Causa: transição da estrutura amorfa da água líquida pra estrutura cristalina do gelo
- Efeito: uma das principais consequências é o congelamento da superfície de alguns lagos no inverno, permitindo a continuidade da vida subaquática

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Qual a razão da expansão térmica?

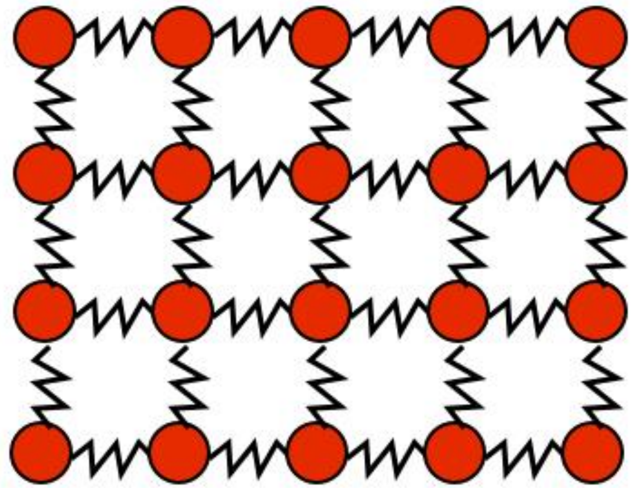
Mas, por que os materiais se expandem quando aquecem?

Prof. Osvaldo Canato Jr

canatojr@ifsp.edu.br

canatojr@fisicaemrede.com

Sólidos como um sistema massa-mola



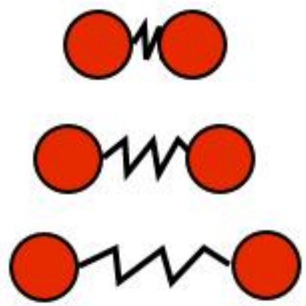
Átomos como massas que interagindo entre si como se estivessem unidas por molas, oscilam em torno de uma posição de equilíbrio.

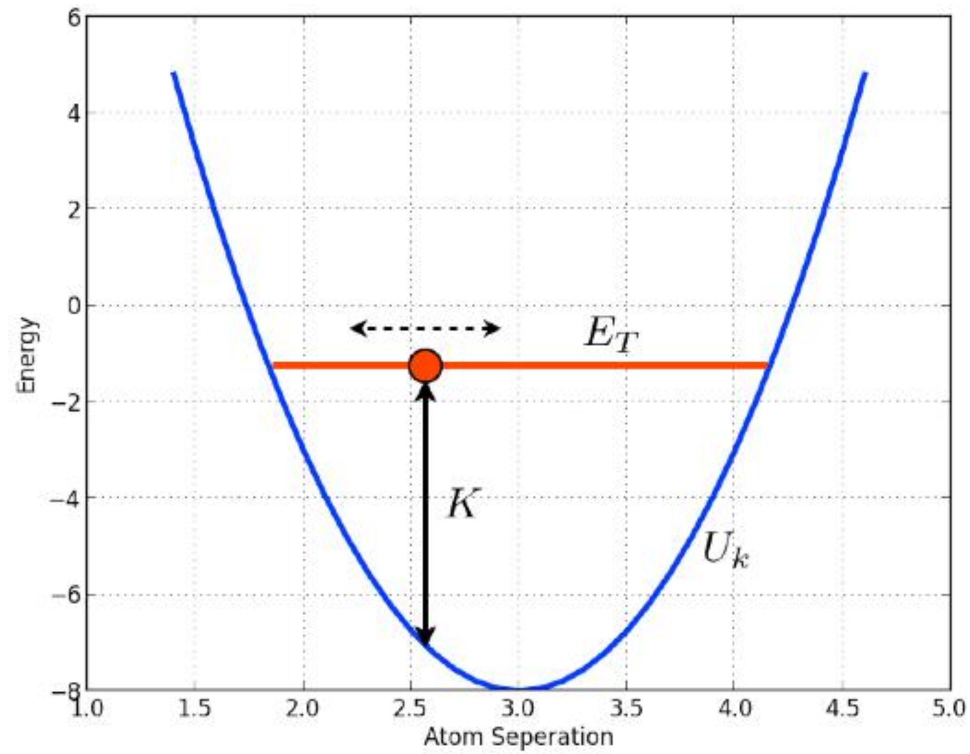
Este modelo é satisfatório para diversos fenômenos, tais como a variação da força de contato entre dois objetos, relação entre tensão e deformação, propagação do som.

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3
Expansão térmica de sólidos e líquidos

Sistema massa-mola de duas partículas





E_{total} = K + U

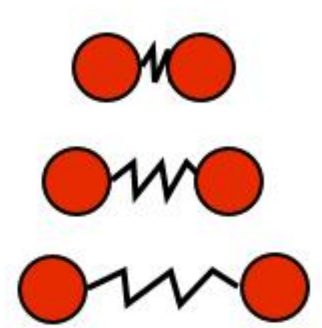
- U = 0 ⇒ K = E_{total} (posição de equilíbrio)
- K = 0 ⇒ U = E_{total} (máxima separação; ponto de retorno)

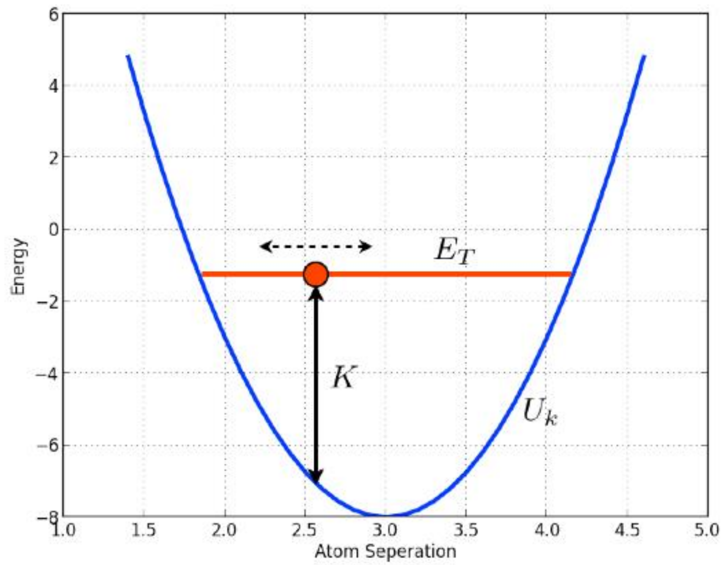
Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Limitação do modelo





E_{total}	U	K
-1	-8	7
-1	-5	4
-1	-2	1
-1	0	-1 ???

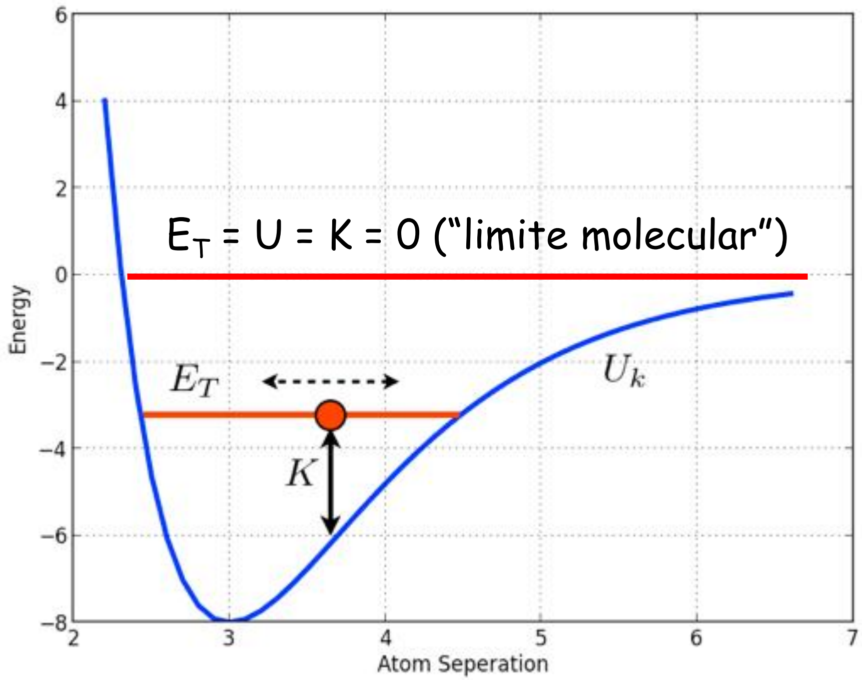
Não é possível aumentar E_{total} indefinidamente, pois K (sempre positivo) jamais poderia ser menor que U.

Os átomos não poderiam ser separados

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3
Expansão térmica de sólidos e líquidos

Modelo mais realista ... e complexo (potencial de Morse)



- $E_{total} > 0 \Rightarrow$ dissociação dos átomos
- Quanto muito próximos, a energia potencial atinge valores muito altos

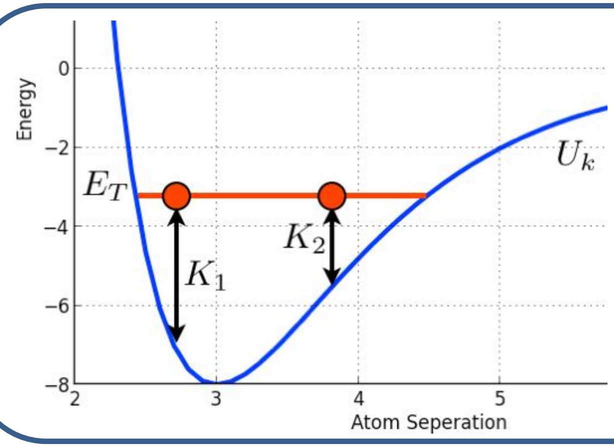
Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

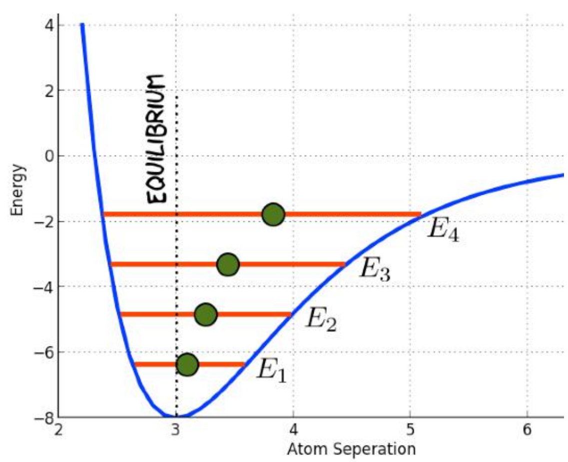
TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Maior a energia, maior a distância entre os dois átomos



Quebra da simetria do modelo massa-mola: quanto maior a distância interatômica, menor a velocidade.



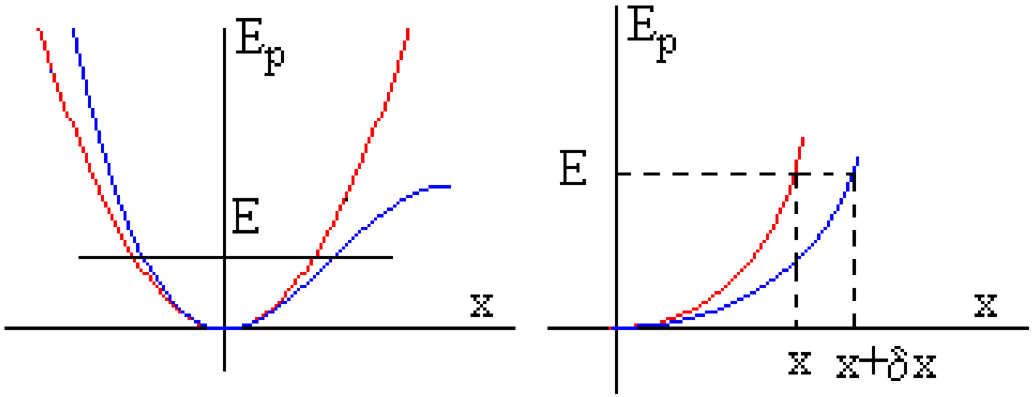
Quanto maior a energia, maior o valor da distância média entre os dois átomos.

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3
Expansão térmica de sólidos e líquidos

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

Equacionamento



- Modelo massa-mola $\Rightarrow$ MHS
  $E_p(x)=ax^2$ (parábola)

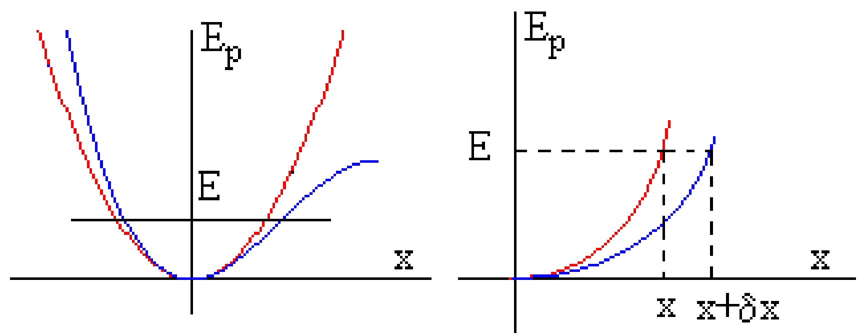
- Modelo do potencial de Morse $\Rightarrow$ Movimento não harmônico
  $E_p(x)=ax^2-bx^3$; b/a mede o grau de anarmonicidade.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Resolução da equação



$$E = ax^2 = a(x+\delta x)^2 - b(x+\delta x)^3 \Rightarrow \boxed{\delta x = \frac{bx^2}{2a}}$$

(desprezando os termos em δx^2 e δx^3 e tendo em conta que $ax^2 >> bx^3$)

Sendo a temperatura uma medida do grau de agitação das partículas, pode-se dizer que $E = ax^2$ é proporcional à temperatura do sistema.

$$\boxed{\delta x = \frac{b}{2a^2} k_B T}$$

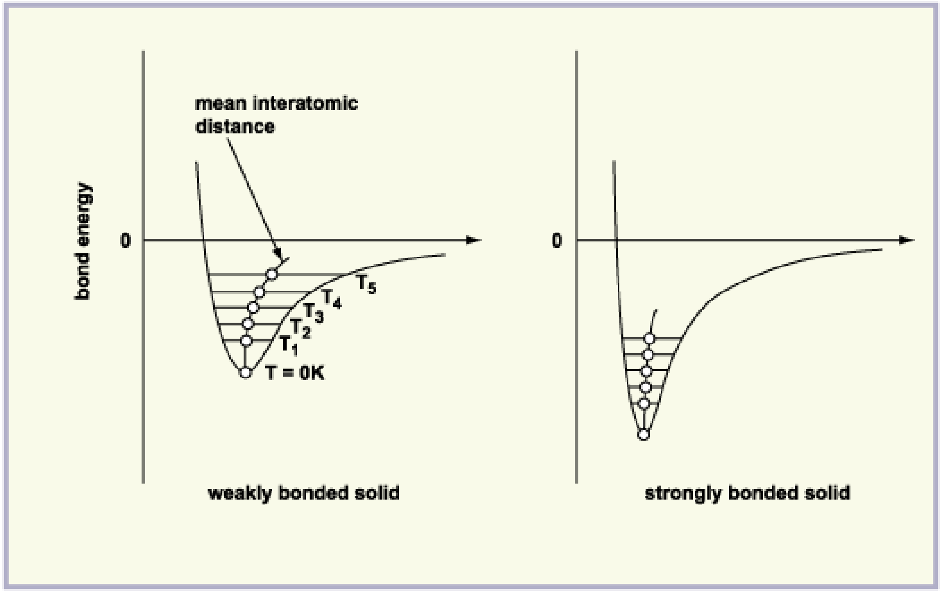
K_B = constante de Boltzmann

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Energia de ligação e coeficiente de expansão térmica



- Materiais fortemente ligados, como a cerâmica, têm baixos valores de coeficientes de expansão térmica, quando comparados aos metais.
- Já, polímeros, especialmente os termoplásticos ou elastómeros, fracamante ligados, têm altos valores desse coeficiente quando comparadas aos metais.

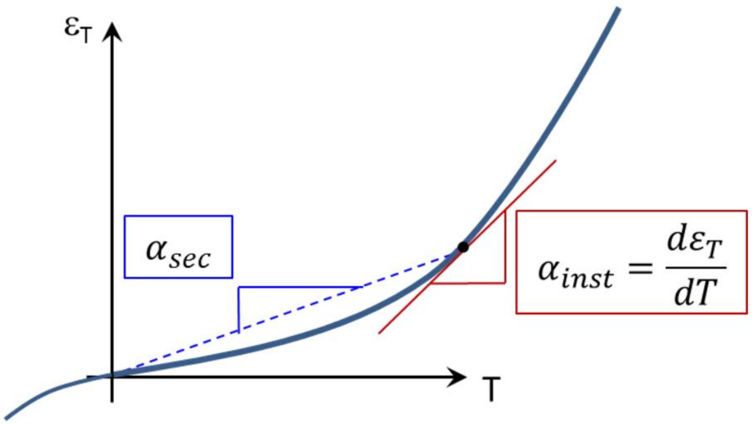
Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

Coeficiente de expansão térmica médio e instantâneo



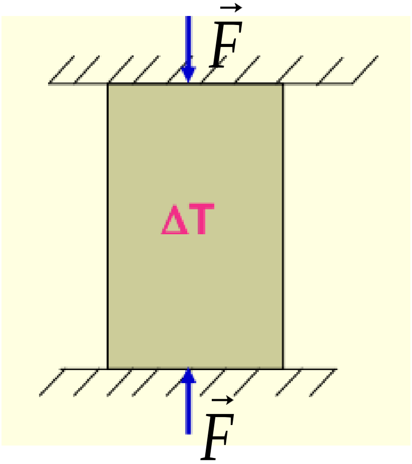
A deformação de um material ($\varepsilon = \Delta L/L_0$) nem sempre varia de forma linear com o aumento da temperatura:

- $\alpha_{inst} \Rightarrow$ valor instantâneo ou verdadeiro do coeficiente de expansão térmica para determinada temperatura.
- α_{sec} (ou $\alpha_{médio}$) $\Rightarrow$ valor médio do coeficiente de expansão térmica para determinado intervalor de temperatura.

Tensão térmica

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos



Quando um material é aquecido mas é impedido de se expandir por estar apoiado em estruturas fixas, surge sobre ele uma tensão térmica.

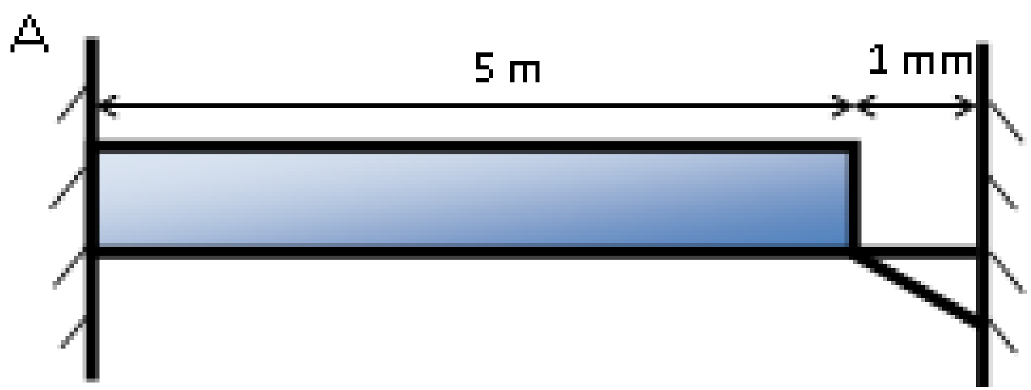
- $\Delta L_{\text{expansão térmica}} = \alpha L_0 \Delta T \Rightarrow \dfrac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T$
- $\dfrac{\Delta L_{\text{compressão}}}{L_0} = \varepsilon$ (deformação)

$$\boxed{\varepsilon = \alpha \Delta T}$$

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

Exemplo

Uma viga de aço com comprimento 5 m e área de secção transversal 3600 mm^2 encontra-se fixada à parede A e apoiada junto à parede B, com uma folga de 1 mm desta, a uma temperatura de 12 °C. Determinar a tensão atuante na viga quando a temperatura subir para 40 °C. Dado: $Y_{aço}$ = 210 GPa; $\alpha_{aço}$ = 1,2.10^{-5} °C^{-1}.

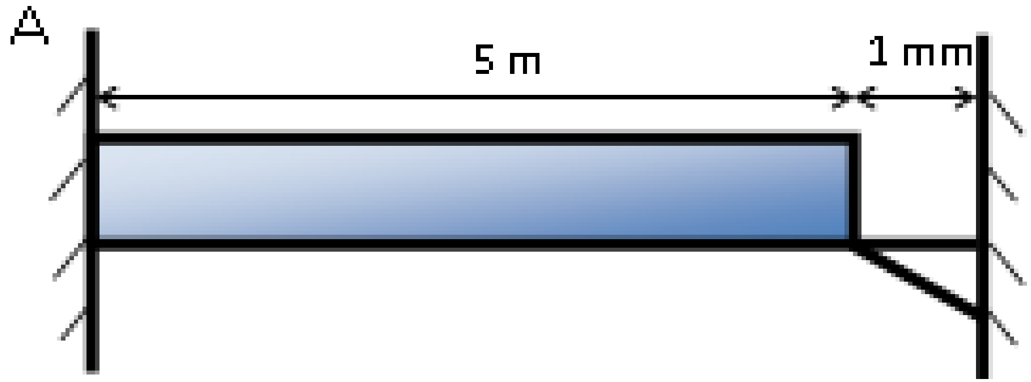


Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Resolução



$$\Delta L_{livre} = L_0.\alpha.\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta L_{livre}}{L_0.\alpha} = \frac{10^{-3}}{5.1,2.10^{-5}} = \frac{1}{6}.10^2 = 0,167.10^2 = 16,7\,^oC$$

$$\text{Então, } \theta_{f_{livre}} = \theta_{i_{livre}} + \Delta\theta = 12 + 16,7 = 28,7\,^oC$$

$$\sigma_{contração térmica} = Y.\alpha.\Delta\theta_{contração térmica} = 210.10^9.1,2.10^{-5}.(40 - 28,7)$$

$$= 284,76.10^5 = 28,5\,MPa$$

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Dilatação linear para um α qualquer

No 1º slide afirmou-se que a relação abaixo teria validade para os casos em que $\Delta L \ll Lo$, o que implica supor um diminuto valor para o coeficiente α.

$$\boxed{\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \Rightarrow L = L_0 \left(1 + \alpha \Delta T\right)}$$

Mas e se o valor de α não for, assim, tão pequeno?

Resposta: nesse caso, teremos que integrar a seguinte relação:

$$\frac{dL}{dT} = \alpha L$$

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com

Dilatação linear para um α qualquer

$$\frac{dL}{dT} = \alpha L \Rightarrow \frac{dL}{L} = \alpha dT \Rightarrow \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \int_{T_0}^{T} \alpha dT \Rightarrow$$

$$\ln L - \ln L_0 = \alpha \Delta T \Rightarrow \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \alpha \Delta T \Rightarrow$$

$$\frac{L}{L_0} = e^{\alpha \Delta T} \Rightarrow L = L_0 e^{\alpha \Delta T}$$

$$Mas \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots \Rightarrow$$

$$e^{\alpha \Delta T} = \left(1 + \alpha \Delta T + \frac{(\alpha \Delta T)^2}{2} + \frac{(\alpha \Delta T)^3}{6} + \ldots\right)$$

$$\boxed{\therefore L = L_0 \left(1 + \alpha \Delta T + \frac{(\alpha \Delta T)^2}{2} + \frac{(\alpha \Delta T)^3}{6} + \ldots\right)}$$

Exemplo

TMDZ3

Expansão térmica de sólidos e líquidos

Dada uma haste de 1,00 m de comprimento e uma mudança de temperatura de 100,0° C, determine o erro causado pela comumente utilizada aproximação quando (a) α = 2,00 X 10^{-5} $^{0}C^{-1}$ (um valor típico para um metal) e quando (b) α = 0,020 $(^{0}C)^{-1}$ (um valor alto não realístico, apenas para comparação).

$a)$

$$L = L_0\left(1+\alpha\Delta T\right) = 1.(1+2.10^{-5}.100) = 1.(1+0,002) = 1,002\ m$$

$$L = L_o e^{\alpha\Delta T} = 1.e^{0,002} = 1,002002001334$$

$$\Delta\% = \frac{1,002002001334 - 1,002}{1,002} = 1,99.10^{-4}\%$$

$b)$

$$L = L_0\left(1+\alpha\Delta T\right) = 1.(1+2.10^{-2}.100) = 1.(1+2) = 3\ m$$

$$L = L_o e^{\alpha\Delta T} = 1.e^{2} = 7,38905609893065$$

$$\Delta\% = \frac{7,38905609893065 - 3}{3} = 146,301\%$$

Prof. Osvaldo Canato Jr
canatojr@ifsp.edu.br
canatojr@fisicaemrede.com